Toets Talen en Automaten

18 mei, 11.10 uur –13.10 uur, ZG 119 / WSN 31

Schrijf met blauwe of zwarte pen; *niet* met potlood en *niet* met rode pen. Voorzie alle bladen van je naam. Nummer de bladen en vermeld op het eerste blad het totale aantal.

Werk netjes. Formuleer je antwoorden zo compleet en tevens zo beknopt mogelijk. Je mag — tenzij expliciet anders aangegeven staat — direkt een beroep doen op (1) de stellingen uit het cursusmateriaal (*mits je ze goed formuleert*), (2) indien van toepassing: een (al dan niet bewezen) resultaat uit een eerder onderdeel van de opgave in kwestie.

Advies. Lees het geheel van de opgaven eerst rustig door en verdeel de beschikbare tijd met beleid.

Opgave 1. Zij A een DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

(i) Reproduceer de recursieve definitie van de functie $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$.

(ii) Leid uit deze definitie af dat voor alle $q \in Q$ en alle $a \in \Sigma$ geldt: $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a)$.

Opgave 2. Zij L de taal van alle strings over het alfabet $\{0, 1\}$ die eindigen op 01.

(i) Construeer een reguliere expressie voor L. (Geef een beknopte toelichting.)

(ii) Construeer een NFA voor L. (Geef een beknopte toelichting.)

(iii) Zij A een willekeurige NFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Volgens de theorie is A om te zetten in een DFA A' met de eigenschap dat $L(A') = L(A)$. Recapituleer in het kort de constructie van A' uit A. Schrijf hiertoe $A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ (met hetzelfde invoeralfabet Σ als A) en geef de formules die uitdrukken hoe Q', δ', q'_0 en F' uit de componenten van A te verkrijgen zijn. (Het gaat hier enkel om een reproductie van de standaardconstructie van A' uit A; een recapitulatie van het correctheidsbewijs wordt hier niet gevraagd.)

(iv) Construeer een DFA voor L. (Geef een toelichting.)

Opgave 3. Zij Σ het alfabet $\{0\}$. Definiëer voor elk natuurlijk getal p de string $\overline{p} \in \Sigma^*$ door: $\overline{p}$ bestaat uit p voorkomens van 0. (Voorbeelden: $\overline{0} = \varepsilon$, $\overline{1} = 0$, $\overline{2} = 00$, $\overline{5} = 00000$.) Definiëer voor elke willekeurige deelverzameling V van de verzameling $\mathbb{N}$ van de natuurlijke getallen: V is *regulier* als de volgende taal L_V regulier is in de gebruikelijke zin:

$$L_V = \{\overline{p} \mid p \in V\}$$

(i) Bewijs dat de verzameling van de even getallen regulier is.

(ii) Zij V een willekeurige reguliere verzameling van natuurlijke getallen. Bewijs dat er een $n \in \mathbb{N}$ is met de volgende eigenschap. Voor elke $p \in V$ met $p \geq n$ is is er een $y \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$0 < y \leq n \text{ en } p + (k-1)y \in V \text{ voor alle } k \in \mathbb{N}$$

(*Aanwijzing.* Pas het pomplemma toe op L_V.)

(iii) Bewijs dat er voor elke reguliere verzameling V van natuurlijke getallen een $n \in \mathbb{N}$ is zodanig dat voor elke $p \in V$ met $p \geq n$ geldt: er is een $q \in V$ zodanig dat $p < q \leq p + n$.

(iv) Bewijs dat de verzameling van de kwadraten in $\mathbb{N}$ *niet* regulier is.

Z.O.Z.

Opgave 4. Definiëer: een $s\varepsilon$-NFA ("*s*peciale ε-NFA") is een ε-NFA A met de volgende speciale eigenschappen:

(1) Er is precies één accepterende toestand en deze toestand is ongelijk aan de starttoestand.

(2) De starttoestand heeft geen binnenkomende pijlen. (Precisering: als $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, dan is er *geen* paar $(q, s) \in Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ zodanig dat $q_0 \in \delta(q, s)$.)

(3) De accepterende toestand heeft geen uitgaande pijlen. (*Deelopgave* (i): preciseer dit zelf.)

Laat nu zien dat in het algemeen het volgende geldt.

(ii) $s\varepsilon$-NFA's A_1 en A_2 voor talen L_1, resp. L_2 zijn om te zetten in een $s\varepsilon$-NFA voor de taal $L_1 \cup L_2$.

(iii) Een $s\varepsilon$-NFA A voor een taal L is om te zetten in een $s\varepsilon$-NFA voor de taal L^*.

Opgave 5. Zij A een DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Definiëer de relatie $\sim$ op Q door:

$$q \sim q' \iff \forall w \in \Sigma^* (\hat{\delta}(q, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q', w) \in F)$$

Er is bij de cursus TA een algoritme behandeld voor de bepaling van $\sim$, en wel via het complement D van $\sim$ in $Q \times Q$. (Dit complement D is ook weer een relatie op Q.)

(i) Toon aan:

  (a) $\sim$ is symmetrisch.

  (a) D is symmetrisch.

  (b) D is irreflexief (in de zin dat $(q, q) \notin D$ voor alle $q \in Q$).

(ii) Algoritmisch wordt D bepaald via deelverzamelingen D_n $(n \in \mathbb{N})$ van D. Reproduceer de definitie van deze deelverzamelingen en bewijs: (1) $D_n \subseteq D_{n+1} \subseteq D$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en (2) $D_n = D$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Beschouw nu in het bijzonder het volgende geval:

$$A = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{a, b\}, \delta, 0, \{1, 4\}),$$

waarbij δ gegeven wordt door:

$$\delta(0, a) = 1,\ \delta(1, a) = 3,\ \delta(2, a) = 1,\ \delta(3, a) = 2,\ \delta(4, a) = 3,\ \delta(5, a) = 4,$$

$$\delta(0, b) = 2,\ \delta(1, b) = 4,\ \delta(2, b) = 0,\ \delta(3, b) = 5,\ \delta(4, b) = 1,\ \delta(5, b) = 2.$$

Bepaal $\sim$, en wel via het bedoelde algoritme.

Opgave 6.

(i) Zij L een willeurige taal, zeg over alfabet Σ.

  (a) Wanneer heet L recursief opsombaar?

  (b) Wanneer heet L recursief?

(ii) Hoe luidt *de these van Church-Turing*?

(iii) Veronderstel: de talen L_1 en L_2 over Σ zijn allebei recursief. Toon aan dat de taal $L_1 \setminus L_2$ ook recursief is. (Je mag hier eventueel gebruik maken van de these van Church-Turing.)